

### 5. Übungsblatt zur VL "Dynamische Systeme"

Abgabe: Mi., 04.06.2008, vor der VL

#### 5.1.\*

Bestimme die Definitionsintervalle  $(a_{x_o}, b_{x_o})$  der maximalen Intervalkurven von  $x \mapsto x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

#### 5.2.

Sei  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein glattes Vektorfeld, so dass  $v(x) \geq x^2$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \neq x_o \in \mathbb{R}$  und  $\varphi : (a_{x_o}, b_{x_o}) \rightarrow \mathbb{R}$  die maximale Integralkurve von  $v$  mit  $\varphi(o) = x_o$ .  
Zeige:  $(a_{x_o}, b_{x_o}) \neq \mathbb{R}$ .

#### 5.3.

Let  $X \subset \mathbb{R}^2$  be a star-shaped region and  $V : X \rightarrow \mathbb{R}^2$  a smooth (= glatt) vector-field with co-ordinates  $V_1$  resp.  $V_2$ . Suppose further that there is a smooth function  $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\frac{\partial}{\partial x}(\chi V_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\chi V_2) > 0.$$

Prove by Stokes' theorem that  $V$  has no non-trivial periodic integral curves in  $X$ .

#### 5.4.

Bekanntlich kann man eine Epidemie durch die DGL

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -rxy \\ \dot{y} &= rxy - \gamma y, \quad r, \gamma > 0 \end{aligned}$$

modellieren. Eine Impfung des anfälligen Bevölkerungsteils  $x$  führt zu folgender Modifikation

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -rxy - \lambda x \\ \dot{y} &= rxy - \gamma y, \quad r, \gamma, \lambda > 0. \end{aligned}$$

Zeige:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Wie verhält sich  $y$ ?